# Pourquoi les taux des prêts renouvelables des établissements de crédit à la consommation sont-ils proches des taux d'usure ?

Bruno Fabre
CREGO – Université Montpellier II
bruno.fabre@univ-montp2.fr

Alain François-Heude
CREGO – Université Montpellier II
alain.francois-heude@univ-montp2.fr

Résumé :

Dans un contexte de taux d'intérêt historiquement bas, le marché des prêts renouvelables accordés par les établissements de crédit spécialisés aux particuliers apparaît atypique par le niveau des taux pratiqués proches des taux d'usure. La littérature anglo-saxonne avance quelques facteurs explicatifs parmi lesquels les risques bancaires de sélection adverse et de hasard moral à l'origine d'un risque de défaillance des emprunteurs apparaissent les plus fondés. Nous montrons que les taux pratiqués ne correspondent pas à des taux de défaillance anticipés réalistes mais plutôt à l'existence de rentes à l'origine de « *free cash flows* » pour ces établissements en situation de collusion et par ailleurs filiales de groupes fortement présents dans le financement d'événements médiatiques. Une mesure actuarielle du taux de profit, correspondant à la provision non utilisée pour couvrir la défaillance, est proposée, laquelle conduit à l'obtention d'un critère d'équivalence entre les différents schémas de défaut possible. il en ressort que les taux de prêt pratiqués ne correspondent pas à un risque de défaillance annoncé et constaté.

Janvier 2006

# Pourquoi les taux des prêts renouvelables des établissements de crédit à la consommation sont-ils proches des taux d'usure ?

Les facilités offertes au public pour obtenir un crédit renouvelable à la consommation sont impressionnantes et participent au soutien de la croissance économique tant recherchée par les pouvoirs publics. La publicité dans les média (presse, TV, Internet) est permanente et encourage les consommateurs à solliciter ce type de crédit : un prêt avec une réponse quasi-immédiate. Les conditions d'attribution sont légères et portent pour l'essentiel sur la non inscription au FICP (Fichier national des Incidents de remboursement des Crédits aux Particuliers). Les particuliers profitent largement et depuis longtemps de ces facilités de crédit accordées puisque le montant des encours du crédit à la consommation ne cesse d'augmenter passant de 37,8 milliards d'€ en 1987 à 112 milliards d'€ en 2004, en augmentation annuelle moyenne de 7%. Au sein de cet encours, les prêts renouvelables sont passés de 8 à 25 milliards d'€ en progression annuelle de 5,5% et constituent pour plus de 90% les encours des établissements de crédits spécialisés (Cofidis, Cetelem, Sofinco,….).

Si cet engouement des ménages pour le crédit à la consommation se déroule dans un contexte macroéconomique largement favorable de faible taux d'intérêt, les niveaux des taux du crédit renouvelable sont, quant à eux, proches de l'usure définie comme étant les taux supérieurs de 1,33 au taux moyen pratiqué par les banques pour des opérations similaires.

Cette prime est-elle destinée à couvrir une potentialité de défaillance accrue des emprunteurs ou bien traduit-elle une situation de marché captif soit en raison de barrières à l'entrée, soit à cause de pratiques collusives des sociétés participantes, en général filiales de groupes financiers impliqués dans le crédit bancaire traditionnel ? La question mérite d'être posée puisque ces établissements annoncent dans un rapport de la Banque de France (Bulletin BdF N° 115, juin 2003) une sélection rigo ureuse des candidats au crédit (60% de demandes rejetées) et un taux de défaillance de l'ordre de 2 à 3% des montants prêtés.

Pourtant, le répertoire national des incidents de paiements pour les prêts aux particuliers recense 2 929 123 problèmes pour l'année 2004 concernant prés de 2 000 000 de personnes, qui ont conduit à 646 847 mesures. La ventilation de ces incidents nous indique que 61,7% des incidents ont trait à des prêts personnels renouvelables (autres qu'immobilier, LOA, découvert ou achat à tempérament). La fixation de taux élevés servirait donc plutôt aux établissements de crédit spécialisés à couvrir *ex ante* les coûts de défaillance de certains clients indélicats.

Aussi, le résultat obtenu par les établissements de crédit ne serait-il pas celui attendu et démontrerait que le marché du crédit est de type non-walrassien, la coordination des transactions par les prix s'avérant inefficace puisque la pratique de ces taux usuraires générerait des effets pervers :

- de souscription de contrats à des fins frauduleuses (levée de fonds sans intention de rembourser),
- d'octroi de prêts à des personnes surendettées pratiquant « le nomadisme bancaire » (en témoigne les 20% de dossiers de surendettement dont la moyenne est de 3,66 crédits par dossier) d'où une probabilité de défaillance élevée,
- de signature de prêts à des taux très élevés par des clients à forte solvabilité mais choisissant pour certains d'entre eux les projets les plus risqués.

Dès lors, si la fixation de taux aussi élevés génère autant d'effets pervers, pourquoi n'assiste-t-on pas à une décrue de ces taux ? Après avoir mis en évidence le niveau élevé des taux des prêts renouvelables en France depuis 1994, une brève revue de la littérature nous permet d'exposer plusieurs raisons dont certaines sont discutables tant du point de vue de leur réalisme que des effets attendus (Partie I). Après avoir décrit notre cadre d'analyse et mis en évidence les schémas possibles de défaillance en fonction des profils des emprunteurs, nous proposons une modélisation de la défaillance et l'impact sur les cash flows attendus (Partie II) puis, nous montrons que les taux fixés par les établissements de crédit spécialisés ne correspondent pas à la couverture d'un risque de défaillance anticipée mais plutôt à la recherche d'une rente à l'origine de liquidités importantes captées par les groupes dont ces établissements sont les filiales (Partie III).

## Partie I – Mise en évidence du caractère usuraire des taux en France et premières explications théoriques de la littérature anglo-saxonne

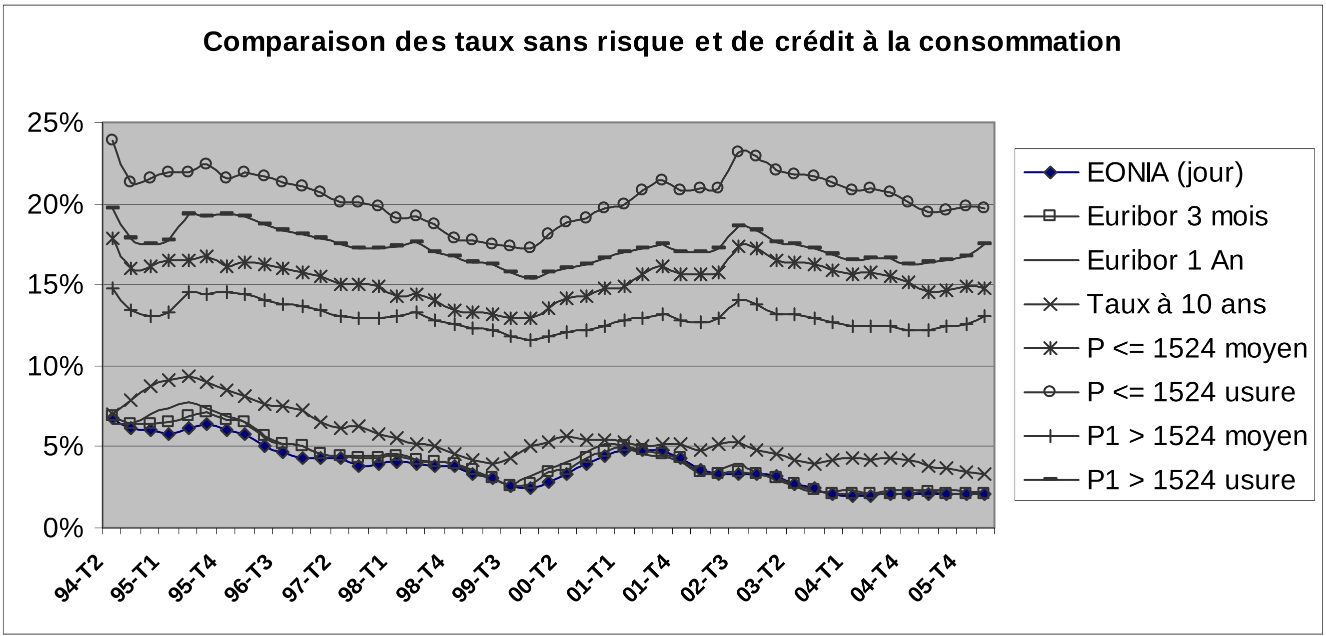
### 1 - structure type d'une opération de crédit à la consommation pour les particuliers :

#### 1-1 – des taux proches des taux usuraires depuis 1994

L'opération de prêt renouvelable étudiée consiste généralement en un crédit reconstituable d'un an renouvelable de 500€ à 10 000€, par tranche de 500€ avec une mensualité de remboursement de 15 ou 20€ par mois, selon les offres. Le TEG (Taux Effectif Global) avoisine les 16,75% l'an pour les prêts d'un montant inférieur à 1 524€ et les 19,70% pour ceux d'un montant supérieur. Ainsi, un prêt de 1 000€ remboursé par mensualités de 29,44€ au TEG de 19,70% durera 48 mois.

Le graphique suivant illustre le comportement des taux d'intérêt sans risque (au jour le jour, à 3 mois, à un an et à 10 ans) et des taux moyen constatés (TEM) et usuraires (TU) pour des prêts à la consommation de +/- 1524€.

Graphique 1 : Niveau des taux du second trimestre 1994 au dernier trimestre 2005




Source des taux sans risque http://www.ecb.int/stats/money/indices/html/index.en.html (les taux trimestriels ont été calculés à partir de la moyenne arithmétique des taux mensuels du trimestre précédent)
Source des taux de crédit http://www.banque-france.fr/fr/poli_mone/taux/credit/usure99.htm

Une analyse rapide montre que les taux sans risque sont, sur la durée étudiée, tous inférieurs à 10% et depuis 2003 inférieurs à 5%. Quels que soient les montants empruntés, les taux sont à la limite de l'usure puisque les taux des prêts à la consommation dépassent de plus d'un tiers le taux moyen constaté le trimestre précédent par des établissements de crédit pour des opérations de même nature.

### 1-2 – l'importance du montant du prêt renouvelable

De façon plus fine, si la synthèse statistique par séries de taux (tableau 1) permet d'observer l'importance de la prime de risque des crédits à la consommation et surtout la grande stabilité des taux de prêts risqués au travers des coefficients de variation, elle révèle cependant une forte fluctuation des taux selon le montant des prêts puisque les écarts oscillent de 0,85% à 3,39% pour une moyenne de 2,33%.

Tableau 1 : synthèse statistique des séries de taux d'intérêt sans risque et de taux de crédit

| en trimestre | Statistiques par séries de taux | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Moyenne | Minimum | Maximum | Ecart type | Coeff Var |
| **À 1 jour** | 3,83% | 2,01% | 6,75% | 1,38% | 0,36 |
| **À 3 mois** | 4,06% | 2,06% | 7,14% | 1,54% | 0,38 |
| **À 1 an** | 4,19% | 2,15% | 7,73% | 1,60% | 0,38 |
| **À 10 ans** | 5,59% | 3,27% | 9,32% | 1,65% | 0,29 |
| **TEM < 1524** | 15,33% | 12,94% | 17,89% | 1,17% | 0,08 |
| **TEM > 1524** | 13,00% | 11,52% | 14,74% | 0,77% | 0,06 |
| **TU < 1524** | 20,44% | 17,25% | 23,85% | 1,56% | 0,08 |
| **TU > 1524** | 17,33% | 15,36% | 19,65% | 1,03% | 0,06 |
| **écart TEM** | 2,33% | 0,85% | 3,39% | 0,74% | 0,32 |

Période : du trimestre 2 de l'année 1994 au trimestre 4 de l'année 2005. Les taux sans risque concernent le taux EONIA (TMM avant 99), les taux Euribor à 3 et 6 mois, les taux d'emprunts d'Etat à 10 ans en moyenne trimestrielles. Les taux de crédit sont pour les opérations de référence (TEM) et les limites d'usure (TU). L'écart TEM représente la différence entre les taux des prêts à +/- 1524€. Le coefficient de variation est le rapport : écart type sur moyenne. Le TU est toujours égal à 1,33 le TEM pour des opérations de montants identiques.

De la même façon, la matrice des coefficients de corrélation entre les différentes séries en valeurs trimestrielles (tableau 2) confirme la grande cohérence de la structure des taux sans risque puisque l'écart est minimal (0,88) entre le taux à un jour et le taux à 10 ans et que les coefficients tendent vers l'unité d'autant plus que les horizons de prêts sont voisins. La corrélation parfaite entre TEM et TU est évidente puisque les taux sont en proportionnalité selon un facteur 1,33 mais il est surprenant d'observer que celle entre les opérations de montants faibles et plus importants est seulement de l'ordre de 0,8. Il semble par ailleurs que le niveau des taux de crédit pour les opérations de petits montants est déconnecté des taux de marché ou sans risque, coefficients de l'ordre de 0,4 contre 0,7 pour les prêts supérieurs à 1524€.

Tableau 2 : Matrice des corrélations linéaires entre les taux sans risque et les taux de crédit

| | Taux d'intérêt sans risque | | | | Taux de crédit à la consommation | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | à 1 jour | à 3 mois | à 1 an | à 10 ans | TEM < 1524 | TEM > 1524 | TU < 1524 | TU > 1524 |
| **à 1 jour** | 1 | 0,99 | 0,97 | 0,88 | 0,44 | 0,72 | 0,44 | 0,72 |
| **à 3 mois** | | 1 | 0,99 | 0,92 | 0,41 | 0,72 | 0,41 | 0,72 |
| **à 1 an** | | | 1 | 0,95 | 0,38 | 0,68 | 0,38 | 0,68 |
| **à 10 ans** | | | | 1 | 0,45 | 0,69 | 0,45 | 0,69 |
| **TEM < 1524** | | | | | 1 | 0,79 | 1,00 | 0,78 |
| **TEM > 1524** | | | | | | 1 | 0,79 | 1,00 |
| **TU < 1524** | | | | | | | 1 | 0,79 |
| **TU > 1524** | | | | | | | | 1 |

2 – les explications théoriques avancées par la littérature

Si la recherche en France ne s’est pas encore intéressée, à notre connaissance, à cette problématique, un courant de recherche est né aux USA au début des années 90 en vue d'expliquer le maintien de taux très élevés dans un contexte de concurrence grandissante entre les établissements de crédit et d'émergence de nouvelles technologies de l'information.

2-1 la résolution du problème de sélection adverse et de hasard moral par les taux élevés ?

2-1-1 l'éviction des "mauvais" profils recherchée

Etant donné les caractéristiques des prêts renouvelables, les établissements de crédit sont particulièrement exposés à l'asymétrie d'information, l’emprunteur n’ayant aucune obligation de justifier l’utilisation des fonds, au problème de hasard moral par l'incapacité du prêteur à contrôler l’utilisation des fonds une fois le prêt obtenu ainsi qu'au problème de sélection adverse liée à la qualité de l’emprunteur au moment de la demande de prêt étant donné la rapidité avec laquelle le prêteur doit donner sa réponse et le fait que la solvabilité du consommateur évolue dans le temps.

Dans ce cadre, l’absence de concurrence sur les taux entre les établissements s'expliquerait par la volonté de ces derniers de sélectionner les "bons" emprunteurs. Le premier à avoir conduit cette analyse est Ausubel (1991). Il distingue deux catégories d'emprunteurs : les premiers dont le profil de risque est faible car peu endettés, indifférents aux niveaux des taux car sous-estimant leur probabilité d'obtention de crédit ; les seconds, dont le profil est risqué, sont désireux de s'endetter et sont donc très sensibles aux taux. Dès lors, les banques, soucieuses de ne pas être victimes de sélection adverse en attirant ces profils risqués, refuseraient la concurrence par les taux en les maintenant à des niveaux élevés.

2-1-2 des résultats attendus incertains

Si l'on s'en tient aux travaux fondateurs de Stiglitz et Weiss (1981), en situation d'asymétrie d'information dont serait victime le prêteur, la résolution des ces problèmes de hasard moral et de sélection adverse ne devrait pas se réaliser par des taux élevés mais par un rationnement du crédit anonyme. En effet, plus le prêteur augmente ses taux et plus la conséquence est alors la suivante : une fois obtenu le prêt, l’emprunteur est incité à entreprendre des projets risqués dont les espérances de gain sont plus fortes au détriment d’un risque de pertes et donc de faillite plus élevé pour le prêteur. Ce dernier n’a alors aucun intérêt à fixer des taux d’intérêt trop élevés qui, en présence d’une demande excessive, augmenteraient ses pertes, voire son insolvabilité, en attirant les "mauvais" profils. Au contraire, il doit diminuer ce taux en deçà du taux à l’équilibre et donc rationner le crédit. Cela est d'autant plus vrai dans le cas des crédits "revolving" pour lesquels la différence entre le montant de la ligne de crédit accordé et le montant réellement emprunté génère une asymétrie d'information supplémentaire (Dey et Mumy, 2005).

2-2 le rôle des spécificités du prêt renouvelable

2-2-1 le rôle de l'absence de réputation et de garanties dans les conditions de prêts renouvelables

Dans le cadre des relations interentreprises, Sharpe (1990), Peterson et Rajan (1995) ou encore Boot et Thakor (1994) expliquent la fixation de taux bas (et a contrario des taux élevés) par la durée (ou la brièveté) de la relation bancaire à l’origine d’informations privées dont dispose la banque principale. Mester, Nakamura et Renault (2002) valident cette conclusion à la relation banque-particulier et concluent donc qu’en l’absence de relation durable et continue, spécifique de la relation du crédit à la consommation, les taux offerts aux emprunteurs sont élevés. De même, l'absence d'actif donné en garantie (Mester, 1994) expliquerait en grande partie la fixation des taux élevés.

2-2-2 la remise en question de ces deux facteurs dans le cadre des prêts renouvelables

Dans le cas d'opérations avec les particuliers, les phénomènes de réputation comme outil de résolution des problèmes de hasard moral peuvent difficilement être pris en compte. En effet, même si la probabilité que le particulier sollicite à nouveau le prêteur dans le futur n’est pas nulle, l’octroi d’un crédit à la consommation relève plutôt de la banque à l’acte.

En revanche, en situation de concurrence, ce sont les établissements de crédit qui devraient faire l'objet d'une réputation chez les clients, susceptible de les orienter dans leur choix et en définitive de faire baisser les taux (Kerr, Cosslett, Dunn, 2004).

De même, dans le cadre de la théorie de l'intermédiation amendée, Stiglitz et Weiss (1986) démontrent que les garanties contractuelles données par l’emprunteur ne peuvent suffire à lever l'asymétrie de l'information car elles génèrent deux effets opposés : d’une part, augmenter ces garanties incite les emprunteurs à choisir les projets les moins risqués et donc à diminuer les effets de hasard moral ; mais d’autre part, augmenter ces garanties conduit à sélectionner les emprunteurs les plus riches qui sont aussi ceux qui choisissent les projets les plus risqués donc à accroître les risques de hasard moral et même celui de sélection adverse si l'emprunteur essaie de se faire passer pour riche au moment de sa demande de prêt.

### 2-3 L'existence d'un coût élevé de révélation du profil pour l'emprunteur à l'origine de taux élevés

#### 2-3-1 l'emprunteur "prisonnier" d'un prêteur

En situation d'asymétrie d'information, Sharpe (1990) avance que les emprunteurs dont le risque est faible sont prisonniers de leur prêteur habituel qui leur impose un taux supérieur au taux théorique car le coût de révélation de leur profil de risque à d'autres prêteurs s'avère trop élevé. Etant donné ce coût, si un emprunteur de bonne qualité souhaite changer de banque, son profil sera perçu comme risqué et sa demande rejetée.

Si Von Thadden (2004) nuance ce point de vue en considérant que la banque habituelle ne capture qu'une partie de l'information incitant les prêteurs à fixer les taux de façon relativement aléatoire entre les emprunteurs, ces travaux ne prennent pas en compte le fait que les emprunteurs (ici les particuliers) peuvent choisir leur prêteur (leur propre banque ou un autre établissement) sur la base des caractéristiques des offres réalisées en fonction des informations détenues par les prêteurs.

Les "bons" emprunteurs seraient donc prisonniers de leur banque et ce d'autant que les coûts de recherche puis de changement de banques seraient élevés (Calem et Mester, 1995). Sur un plan empirique, Berlin et Mester (2004) réfutent cette hypothèse de coûts de recherche élevés durant les années 80, période d'étude d'Ausubel (1991).

#### 2-3-2 la mise en concurrence des prêteurs grâce aux nouvelles technologies de l'information

Néanmoins, ces recherches restent trop influencées par le cadre d'analyse inter-entreprises. En effet, contrairement aux entreprises et en particulier dans le contexte actuel d'explosion des nouvelles technologies de l'information, les consommateurs ne supportent plus des coûts de transaction élevés à l'occasion de la souscription d'un prêt de sorte qu'ils peuvent solliciter librement plusieurs prêteurs qui ne disposent plus de monopole informationnel (Kerr et Dunn, 2002). Dés lors l'existence et l'acceptation de taux d'intérêt aussi élevés ne se justifient plus pour les emprunteurs de bonne qualité : on devrait plutôt observer une hétérogénéité des taux pratiqués.

Au vu des éléments théoriques avancés par la littérature, force est de constater qu'elle ne parvient pas à justifier les niveaux des taux élevés puisque les effets attendus sont pour le moins discutables. Il paraît ainsi nécessaire de s'interroger sur la rationalité des taux pratiqués eu égard au risque de défaillance anticipé comparé au risque réellement supporté.

## Partie II – Modélisation de la défaillance et impact sur les cash flows

### 1- Le cadre méthodologique de la mesure de défaillance

#### 1-1 Le taux de profit pour l'établissement de crédit en l'absence de défaillance

L'établissement de crédit emprunte un montant K destiné à financer un cycle de prêts aux particuliers. Il est supposé que la durée de l'emprunt correspond à celle des prêts (m mois) et que les remboursements sont constants. L'établissement de crédit envisage donc d'utiliser les remboursements des prêts (soit un montant cumulé de P par mois) pour faire face à ses propres dépenses : remboursement de son emprunt (capital et charges financières), règlement de ses charges d'exploitation (salaires, communication, gestion, …), provision pour investissement de renouvellement, paiement des impôts et des dividendes, soit un montant global M.

Il est donc possible de mettre en relation ces charges avec le fait générateur de son activité (le prêt) afin de déterminer le taux de revient de l'activité r (les détails des calculs sont en annexe) :

$$K=\sum_{j=1}^{m}\frac{M}{(1+r)^{j}}=M\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(1+r)^{j}}=M\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{r}\right)\quad\Rightarrow\quad M=\frac{Kr}{1-(1+r)^{-m}}\qquad(1)$$

Ce taux actuariel de revient est donc à comparer à la rentabilité attendue des opérations de prêts, notée θr  où le facteur θ caractérise le taux de couverture du risque auquel la société estime être exposée.

En raison de l'existence d'une loi plafonnant le taux de prêt au taux de l'usure, le taux θr est limité à 1,33 du taux de prêt moyen constaté pour les établissements de crédit de type bancaire. Dans la pratique, le facteur θ est choisi de telle manière que le taux obtenu (θr) soit légèrement inférieur au taux de l'usure ou, en d'autres termes, il ne correspond pas à un choix délibéré de provision pour risque. L'établissement de crédit ajuste donc son critère d'acceptation du risque en jouant sur le niveau de *scoring* ouvrant droit au crédit. Pour les prêts aux particuliers nous avons donc :

$$K=\sum_{j=1}^{m}\frac{P}{(1+\theta r)^{j}}=P\left(\frac{1-(1+\theta r)^{-m}}{\theta r}\right)\quad\Rightarrow\quad P=\frac{K\theta r}{1-(1+\theta r)^{-m}}\qquad(2)$$

En absence de défaillance, l'établissement de crédit génère donc un taux de profit *g* égal à la différence entre les encaissements (P) et les décaissements (M < P) de chaque mois actualisés au taux de revient (r) soit :

$$g=\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{P-M}{(1+r)^{j}}\right)\Leftrightarrow \mathrm{g}=\theta\cdot\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right)-1\Leftrightarrow g=\frac{(\theta-1)-\theta(1+r)^{-m}+(1+\theta r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\qquad(3)$$

Avec *θ = 1*, l'établissement atteint son point mort et ne peut donc constituer de provision ( *g = 0* ) et lorsque l'horizon de remboursement s'éloigne g tend vers *θ – 1.*

Dans la mesure où tous les emprunteurs particuliers sont de bonne qualité et ne connaissent aucun incident de paiement, la société de crédit pourra à chaque période mensuelle assurer les propres frais. Pour se prémunir contre une défaillance possible de quelques emprunteurs, le montant P est supérieur à M. Une formalisation de l'écart entre ces deux montants permet d'illustrer la proportion d'emprunteurs ne remboursant pas leur dette.

### 1-2 – l'introduction de clients défaillants

Soit $\alpha_j$ le taux de clients défaillants en j (j=1,2,…p,..,m) avec 0 <= $\alpha_j$ <= $\alpha_j$ < 1 . Pour simplifier, nous supposons l'existence d'une relation fonctionnelle entre les différents $\alpha_j$ et le temps de telle sorte que la connaissance du premier α non nul suffit à caractériser la distribution du défaut et que la société, considérant que le défaut est définitif, cède la créance irrécouvrable à une filiale chargée du contentieux. La proportion de défaillance à la période p ($\alpha_p$ ) sera donc égale à celle de la période précédente augmentée des nouveaux clients douteux. Le taux de défaillance maximum constaté sera donc celui de la dernière période et égal à $\alpha_m$.

Sur la base de ce taux de défaillance anticipé, plusieurs critères sont envisagés afin de caractériser *ex ante* la défaillance subie par l'établissement de crédit :

- le taux optimal de défaillance qui préserve la rentabilité,
- le taux de perte associée à la défaillance,
- le taux de profit résiduel

#### 1-2-1 le taux de défaillance "optimal" ($\alpha^*$)

C'est le taux de défaut que l'établissement de crédit peut supporter ou encore celui qui consomme toute la provision constituée (P – M). Selon notre approche, il convient d'avoir une égalité actuarielle entre les encaissements et les décaissements estimés au taux de revient pour la société nous permettant de mesurer le $\alpha_j$ optimal, noté α*.

$$K = \sum_{j=1}^{m} \frac{M}{(1+r)^j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{P(1-\alpha_j^*)}{(1+r)^j} \qquad (4)$$

Cette notion permet de préserver la rentabilité normale de l'établissement de crédit en indiquant le taux de défaillance 'idéal' puisqu'il correspond aux attentes et exigences des actionnaires.

1-2-2 le taux de perte associée à la défaillance (*x(*α) )

Le taux de perte actuarielle liée à la défaillance, est mesuré par la proportion des remboursements non encaissés et actualisés au taux de prêt et noté *x(*α) :

$$x(\alpha) = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{m}\frac{P\alpha_j}{(1+\theta r)^j} \tag{5}$$

Cette mesure met en évidence la proportion actuarielle du 'chiffre d'affaires' non encaissée suite au défaut.

1-2-3 le taux de profit résiduel g(α)

Noté g(α), il correspond à la partie de la provision non consommée par la défaillance et actualisé au taux de revient de la société :

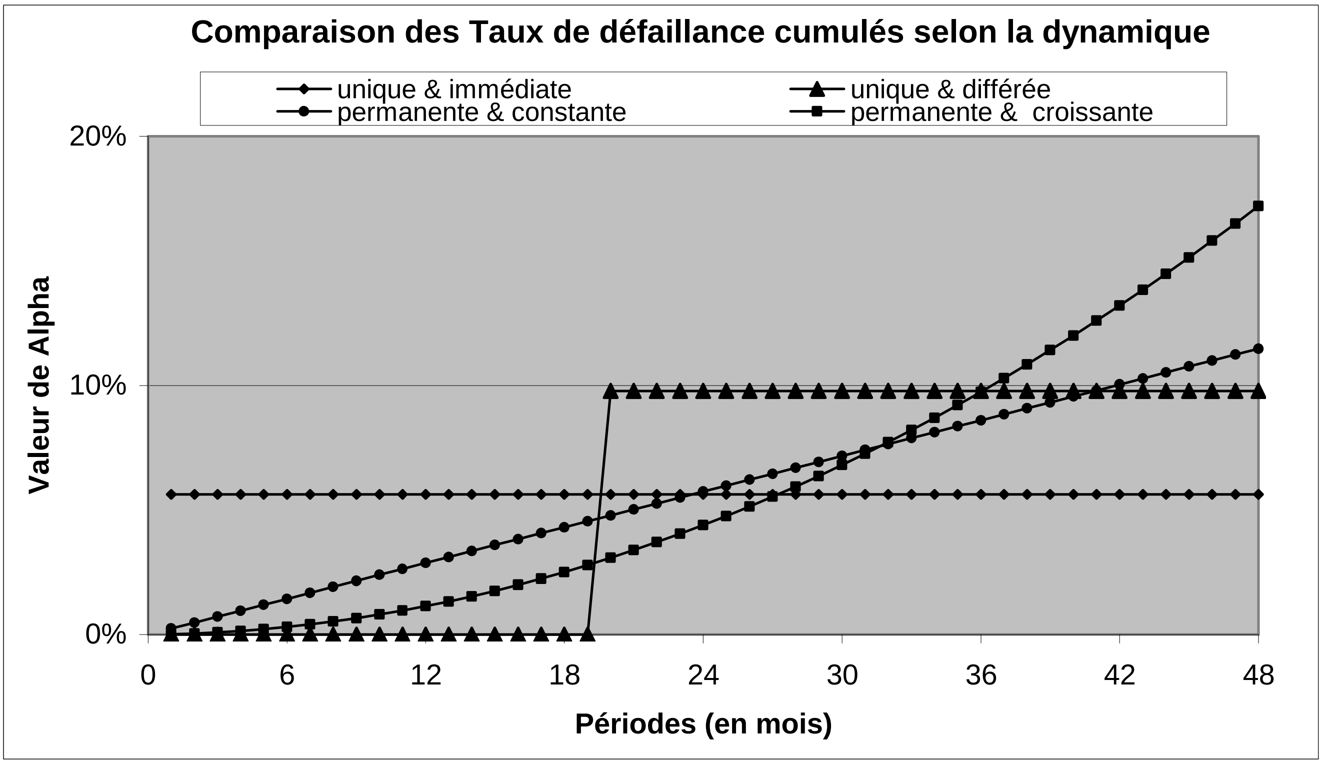
$$g(\alpha) = g - \left[\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{m}\frac{P\alpha_j}{(1+r)^j}\right] \tag{6}$$

Le profit exceptionnel réalisé par la firme correspond à la totalité de la provision (g(0)=g) en absence de défaut et devient nul lorsque le taux de défaillance est optimal (g(α*)=0).

Cependant ce critère de mesure du taux de défaillance reste insuffisant car il omet la prise en considération du schéma de survenance dans le temps des défaillances. Cette prise en compte permet de distinguer deux types de clients : ceux dont la défaillance est délibérée de ceux pour lesquels elle est involontaire. La spécification du schéma de défaut permet avec ces différents critères de mesurer le risque acceptable par l'établissement de crédit et en conséquence son niveau de profit attendu.

2- La description du schéma de défaillance

Deux hypothèses sont envisagées : soit la défaillance est concentrée sur un point du temps (survenance unique, section 2-1), soit elle survient pendant toute la durée de l'opération de prêt (survenance permanente, section 2-2)




2-1 le cas de la défaillance unique

Cela correspond à la situation où l'établissement de crédit est confronté à des clients malintentionnés qui sont tous révélés pendant la même période puis qui ne remboursent plus rien. Envisageons dans un premier temps, l'hypothèse où la défaillance est caractérisée dès le premier remboursement (au mois m=1), avant d'envisager un retard avant la suspension des remboursements.

2-1-1 défaillance unique et immédiate

Il est supposé que certains clients sollicitent un crédit sans intention de le rembourser. Les autres ne connaissent pas de défaillance jusqu'à l'échéance du contrat car ils souhaitent conserver leur capacité à emprunter. Le taux de clients défaillants à la première période est noté α et reste au même niveau jusqu'à l'échéance de l'opération. Soit : $\alpha_j = \alpha, \text{ avec } 1 \leq j \leq m$

Pour la société de crédit, le problème à résoudre est trivial : le montant des mensualités versées par les clients doit, au moins, correspondre à celle due par l'établissement de crédit.

$$M \geq (1-\alpha)P \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \leq 1-\frac{M}{P}$$

Avec un adossement parfait, M = P.(1-α), nous obtenons le taux de défaillance associé au point mort ($\alpha^*$) et en reprenant l'expression de M et P (équations (1) et (2)) :

$$\alpha^* = 1 - \frac{M}{P} = 1 - \frac{1}{\theta}\left(\frac{1-(1+\theta r)^{-m}}{1-(1+r)^{-m}}\right) \Leftrightarrow \alpha^* = \frac{1}{\theta}\left[\frac{(\theta-1)-\theta(1+r)^{-m}+(1+\theta r)^{-m}}{1-(1+r)^{-m}}\right] \qquad (7)$$

Le taux de défaillance α dépend du taux de revient (r), du levier (θ) et de l'horizon (m) :

*α → α(r,m,θ)* et augmente avec *r, m* et *θ* pour tendre vers $\frac{\theta-1}{\theta}$.

Avec l'hypothèse d'une défaillance immédiate et unique, la proportion de perte imputable à la défaillance, notée x(α), se définit simplement comme égale au paramètre α.

En présence de défaillance supérieure à celle anticipée, l'établissement de crédit utilise sa provision (équation 3 avec α =0 ) et réduit ainsi son taux de profit, soit :

$$g(\alpha) = (1-\alpha)\theta\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right) - 1 \qquad (8)$$

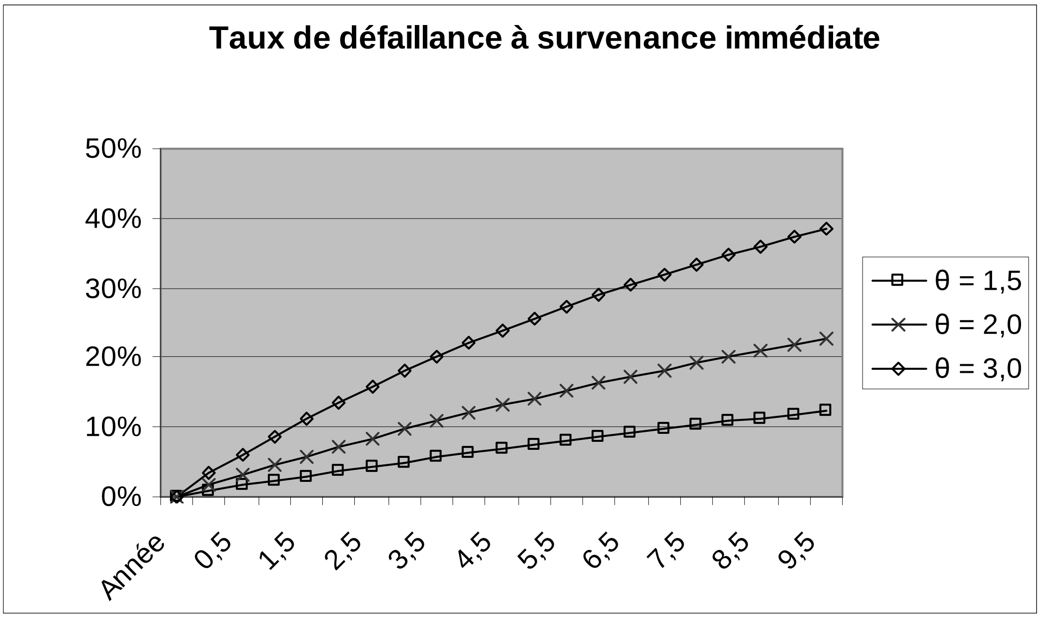
Par exemple, pour un crédit au taux Euribor à 1 an (renouvelé pendant 4 ans) de 3% par an et un chargement de 3% l'an, soit un taux r de 6% l'an (ou 0,5% par mois) et un taux offert aux clients de 18% l'an (1,5% par mois) soit un θ = 3, le taux de défaillance dépasse les 20% des contrats accordés ! (les calculs sont effectués avec un TEG proportionnel. Les résultats seraient légèrement différents avec un TEG actuariel). En reprenant l'équation 7, le tableau 3 illustre les taux de défaillance maximum tolérables selon le coefficient de provision retenu ( θ ) et la durée des opérations de prêts en retenant un taux de financement r annuel de 6%.

Tableau 3 : Taux maximal de défaillance ($\alpha^*$) selon la maturité et le coefficient de proportionnalité

| **Mois** | **Année** | **θ = 1,5** | **θ = 2,0** | **θ = 3,0** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,0% | 0,0% | 0,0% |
| 12 | 1,0 | 1,6% | 3,1% | 6,1% |
| 36 | 3,0 | 4,3% | 8,4% | 15,9% |
| 48 | 4,0 | 5,6% | 10,8% | 20,1% |
| 84 | 7,0 | 9,2% | 17,2% | 30,5% |
| 120 | 10,0 | 12,4% | 22,6% | 38,4% |

Ainsi, si θ est égal à 3, 80% de clients solvables permet la rentabilité de la firme puisque le prêteur peut tolérer 20% de défaillance. Mais si le coefficient de proportionnalité passe à 2, la firme ne peut tolérer que 10,8% de clients insolvables. À partir de l'équation (7), la représentation graphique permet de mieux comprendre l'incitation à allonger les délais de crédit puisque le taux maximum de défaillance immédiate est croissant avec la maturité.

Graphique2




2-1-2 défaillance unique mais différée dans le temps

Pour caractériser le cas où la défaillance est intentionnelle mais différée dans le temps, par exemple pour tenir compte des délais de réaction lors d'une inscription au fichier FICP et aussi pour généraliser l'approche, il suffit de constater que les mensualités remboursées par les prêteurs sont complètes jusqu'à la période p-1, puis la défaillance survient. Pour la société de crédit, le problème à résoudre est de nature actuarielle : la valeur actuelle des mensualités encaissées jusqu'à la date de défaillance plus les remboursements actualisés des emprunteurs après la défaillance de tous les emprunteurs indélicats doit être égale la valeur du capital dû par la société de crédit. L'équation 4 devient alors :

$$K = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{P}{(1+r)^j} + \sum_{j=p}^{m} \frac{P(1-\alpha_p^*)}{(1+r)^j} \qquad (9)$$

Ainsi, l'ensemble des remboursements des prêteurs permettra à la société de crédit de faire face à ses propres besoins de trésorerie (créanciers, actionnaires, frais de gestion). Le taux de défaillance maximal pour la période p s'obtient directement :

$$\alpha_p^* = \frac{(\theta-1) - \theta(1+r)^{-m} + (1+\theta r)^{-m}}{\theta\left[(1+r)^{1-p} - (1+r)^{-m}\right]} \quad \text{avec } 1 \le p \le m \qquad (10)$$

La mesure de la perte actuarielle d'une défaillance α survenant en p s'écrit donc :

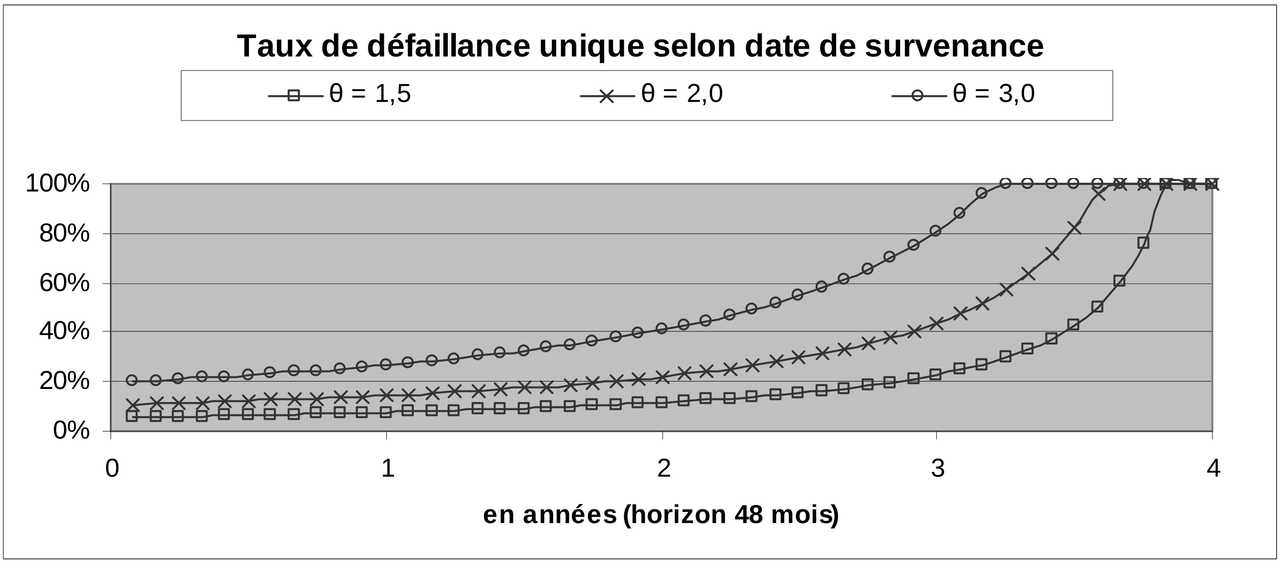
$$x(\alpha) = \alpha_p \left[ \frac{(1+\theta r)^{m-p+1} - 1}{(1+\theta r)^m - 1} \right] \qquad (11)$$

et le profit résultant d'une utilisation partielle de la provision devient :

$$g(\alpha_p) = (1-\alpha_p)\theta\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right) - 1 - \alpha_p\theta\left(\frac{(1+r)^{1-p}-1}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right) \qquad (12)$$

Avec un $\alpha_p$ constant, le profit décroît plus lentement à mesure que la date de survenance de la défaillance, p, augmente. On remarque logiquement que plus $\theta$ augmente et plus l'entreprise peut tolérer des taux de défaillance élevés.

La représentation graphique montre que le taux de défaillance supportable, tel que défini à l'équation (10), augmente avec une survenance tardive du défaut. On remarquera qu'avec une survenance immédiate, au mois p=1, les taux correspondent à l'exemple du tableau 3.




r = 6% par an et l'horizon de prêt est fixé à 48 mois

| Mois | Année | θ = 1,5 | θ = 2,0 | θ = 3,0 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 5,6% | 10,8% | 20,1% |
| 6 | 0,5 | 6,4% | 12,2% | 22,7% |
| 12 | 1 | 7,5% | 14,4% | 26,8% |
| 24 | 2 | 11,5% | 22,0% | 40,8% |
| 36 | 3 | 22,7% | 43,7% | 81,0% |
| 48 | 4 | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

<u>Conclusion :</u> *En retenant une échéance de 4 ans, un taux r de 6% et différents facteurs de proportionnalité, on constate que l'entreprise de prêt peut supporter 100% de défaillance pour les dates ultimes de 48 mois voire moins !*

<u>2-2 cas de défaillance permanente</u>.

Il est supposé que les clients sollicitent un crédit avec l'intention de le rembourser mais qu'ils rencontrent des "accidents de la vie" imprévisibles par nature. La dimension aléatoire de ces défauts peut s'envisager soit de façon uniforme au travers du temps, soit en considérant que l'occurrence augmente avec le temps. Ces deux schémas sont envisagés.

### 2-2-1 la défaillance est permanente à un taux constant

Soit un taux de défaillance constant α par mois. Dès la défaillance, plus aucune mensualité n'est versée. Ainsi, le premier mois, une proportion α cesse de rembourser, puis le mois suivant une proportion α s'ajoute à la précédente, soit 2α et, ce, jusqu'au dernier mois pour atteindre en cumul mα. Cela modifie l'équation 4 en :

$$K = \sum_{j=1}^{m} \frac{P(1 - j\alpha^*)}{(1+r)^j} \tag{13}$$

De rapides calculs permettent d'obtenir la valeur du taux de défaillance α* à l'équilibre:

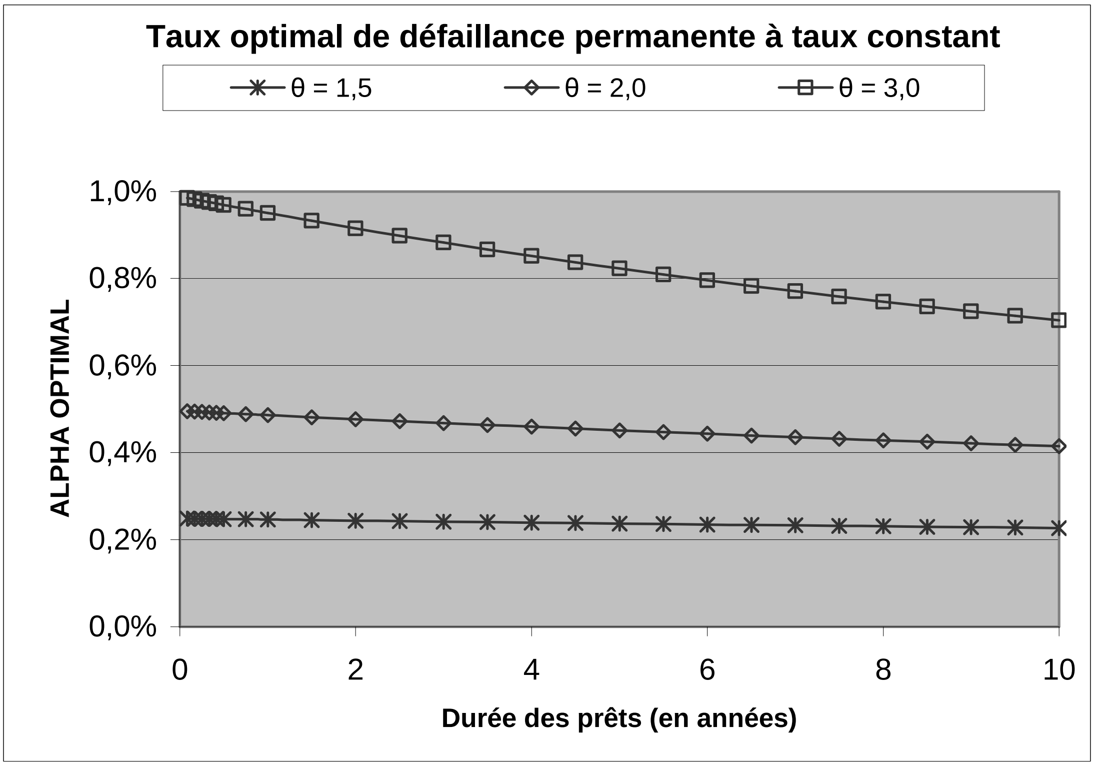
$$\alpha^* = \frac{r}{\theta} \cdot \left[ \frac{(\theta - 1) - \theta(1+r)^{-m} + (1+\theta r)^{-m}}{(1+r) - (1+r+rm)(1+r)^{-m}} \right] \tag{14}$$

L'observation de ce résultat permet de constater que le taux de défaillance α* dépend de 3 paramètres : *α → α(r,m,θ)* . Une analyse de sensibilité montre que *α** augmente quand *r, m* et *θ* augmentent.

Taux optimal de défaillance permanente à taux constant

| Mois | Année | θ = 1,5 | θ = 2,0 | θ = 3,0 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,248% | 0,495% | 0,985% |
| 12 | 1 | 0,246% | 0,486% | 0,951% |
| 36 | 3 | 0,241% | 0,468% | 0,882% |
| 48 | 4 | 0,239% | 0,459% | 0,852% |
| 84 | 7 | 0,233% | 0,436% | 0,771% |
| 120 | 10 | 0,227% | 0,415% | 0,704% |

Taux de base retenu r = 6% par an. Facteurs de proportionnalité variant de 1,5 à 3,0 et échéances du prêt allant de 1 mois à 10 ans.




(Paramètre r = 6% par an. Pour un horizon et un facteur de proportionnalité donnés, on obtient le $\alpha^*$ prévalant à la première période.)

Il convient de remarquer que seul un pourcentage très faible d'emprunteurs sera en défaut dès la première période. Avec un horizon de 48 mois et un taux de revient de 6% l'an, le taux maximal tolérable de défaillance représente moins de 1% du capital souscrit par l'établissement de crédit même avec des hypothèses très contraignantes (θ = 3,0 et m=10 ans)

Sur la base de cette hypothèse, le taux de défaillance x, constaté *in fine*, s'établit à m.α et la mesure actualisée en j=0 s'élève à :

$$x(\alpha) = \alpha\left[\left(\frac{1+\theta r}{\theta r}\right) - m\left(\frac{1}{(1+\theta r)^m - 1}\right)\right] \tag{15}$$

Le taux de profit résiduel s'obtient en appliquant le schéma de défaillance à l'équation 6 :

$$g(\alpha) = \theta\left[1-\alpha\left(\frac{1+r}{r}\right)\right]\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right) - 1 + \alpha\theta m\left[\frac{(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right] \tag{16}$$

A partir de l'équation (14), on visualise l'évolution des taux de défaillance en fonction du coefficient θ et sur la base de r = 6%.

2-2-2 la défaillance est permanente à un taux progressif.

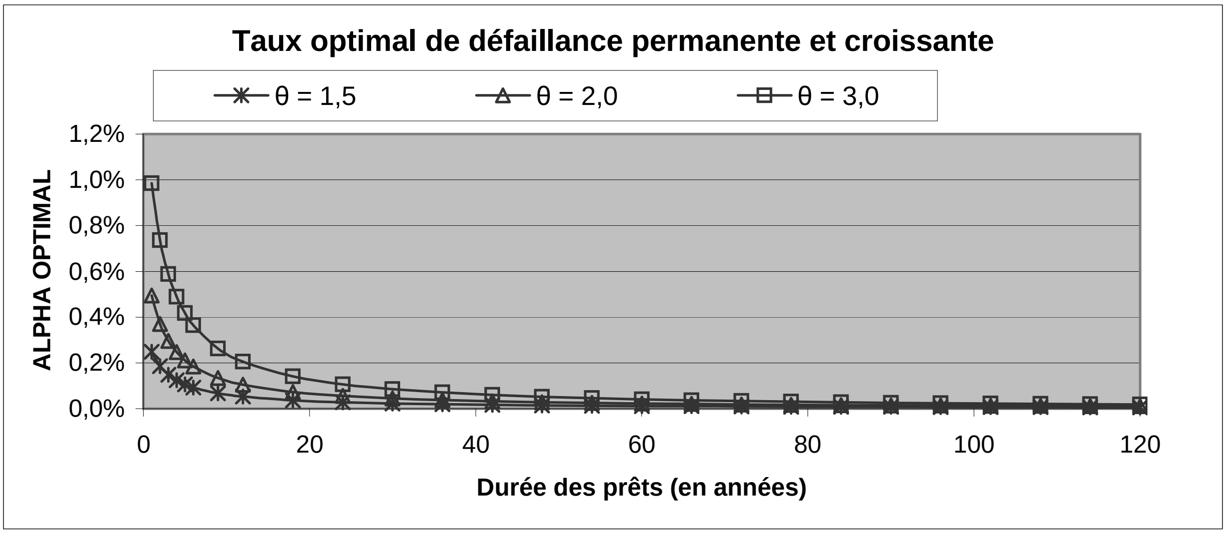
Soit un taux de défaillance constant α par mois. Dès la défaillance, plus aucune mensualité n'est versée. Ainsi, le premier mois, une proportion α cesse de rembourser, le second mois s'y ajoute une proportion 2α, soit 3α (α+ 2α), puis 6α (α+2α +3α),… et, ce, jusqu'au dernier mois pour atteindre une proportion αm(m+1)/2. Cela modifie l'équation 4 en :

$$K=\sum_{j=1}^{m}\frac{P\left[1-\alpha(j(j+1)/2)\right]}{(1+r)^{j}} \qquad (17)$$

Le taux maximal autorisé qui préserve la rentabilité de la société se déduit de l'équation précédente :

$$\alpha^{*}=\frac{r\left[(\theta-1)-\theta(1+r)^{-m}+(1+\theta r)^{-m}\right]}{(1+r)^{2}-\left[(1+r)(1+r+rm)+0,5r^{2}m^{2}(1+mr)\right](1+r)^{-m}} \qquad (18)$$

Comme on peut le voir sur le graphique ci-dessous, le taux initial de défaillance décroît très rapidement en raison du caractère multiplicatif du processus dans le temps.




Taux optimal de défaillance permanente et croissante

| Mois | Année | θ = 1,5 | θ = 2,0 | θ = 3,0 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,248% | 0,495% | 0,985% |
| 12 | 1 | 0,053% | 0,105% | 0,205% |
| 36 | 3 | 0,019% | 0,038% | 0,071% |
| 48 | 4 | 0,015% | 0,028% | 0,052% |
| 84 | 7 | 0,008% | 0,016% | 0,028% |
| 120 | 10 | 0,006% | 0,011% | 0,018% |

La mesure actuarielle de défaillance immédiate et progressive montre toujours la linéarité en α :

$$x(\alpha)=\alpha\left[\left(\frac{1+\theta r}{\theta r}\right)^2-\left(\frac{m}{\theta r}\right)\left(\frac{1+1,5\theta r+0,5\theta rm}{(1+\theta r)^m-1}\right)\right] \tag{19}$$

et le taux de profit résiduel, lui aussi linéaire en α, traduit l'impact du choix du rythme de la défaillance :

$$g(\alpha)=\theta\left[1-\alpha\left(\frac{1+r}{r}\right)^2\right]\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right)-1+\alpha\frac{\theta}{r^2}\left[\frac{\left[0,5rm(2+3r+rm)\right](1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right] \tag{20}$$

Dans cette partie, trois mesures de l'impact de la défaillance sur la provision constituée ont été développées. Le taux optimal de défaillance fournit la limite supérieure du taux de défaut tout en préservant la rentabilité 'normale' de l'établissement de crédit. La seconde mesure exprime, en valeur actuelle, la perte subie par le non remboursement des prêts et la dernière illustre la part de la provision non consommée par une défaillance attendue. La production de nouveaux schémas est directe : il suffit de faire des combinaisons linéaires et de les appliquer aux mesures.

**Partie III – Le choix d’un critère de mesure actuarielle équivalente de la défaillance**

Comme on a pu le constater, la comparaison des taux optimaux de défaillance s’avère délicate selon les hypothèses retenues pour caractériser la dynamique du défaut. Il ne semble pas judicieux de retenir le taux *in fine* (ni d’ailleurs le taux moyen) car cela ne permet pas la prise en considération du taux d’actualisation.

Le critère de défaillance actuarielle, noté x(α) soufre aussi d’une faiblesse de construction. En effet, cet outil ne fournit pas les mêmes valeurs selon la dynamique de la défaillance, comme cela est illustré dans le tableau suivant. De plus, en présence d’une défaillance unique mais différée, le taux a tendance à décroître avec le temps et s’effondre lorsque l’établissement de crédit rencontre une défaillance si tardive qu’elle peut supporter un défaut généralisé. Le profit lié à la non utilisation de la provision, noté g(α), est dans ce cas nul. Des calculs avec les mêmes paramètres (r, θ, m et p) et un taux de perte x(α), fixé à 5% illustrent la grande variabilité du taux de profit résiduel.

Comparaison des taux de défaillance actuarielle

| | | | Défaillance unique | | Défaillance permanente | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **alpha optimal** | | | **immédiate** | **différée** | **constante** | **croissante** |
| **paramètres** | | **α* =** | 5,626% | 9,78% | 0,2390% | 0,0146% |
| r /mois | **0,50%** | | | | | |
| θ = | **1,5** | **x(α*) =** | 5,626% | 5,484% | 5,513% | 5,456% |
| m = | **48** | | | | | |
| p = | **20** | **g(α*) =** | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,000% |
| g(0) = | 5,961% | | | | | |
| | | **α =** | 5,000% | 8,92% | 0,2168% | 0,0134% |
| **taux de perte constant** | | **x(α) =** | 5,000% | 5,000% | 5,000% | 5,000% |
| | | **g(α) =** | 0,663% | 0,526% | 0,554% | 0,498% |

Il semble donc pertinent de retenir le critère du taux de profit résiduel fondé sur la valeur des *cash flows* non consommés par la défaillance et actualisée au taux de revient de l’établissement de crédit. Cela permet d’obtenir un indicateur linéaire de la défaillance et donc d’établir une équivalence entre les différents schémas via le paramètre α.

En prenant pour référence le taux de défaillance avec une survenance immédiate et unique, il est possible d’exprimer la valeur des coefficients α des autres schémas de défaillance en égalisant leur taux de profit résiduel. Soit :

- pour un schéma de défaillance unique et différée à la période p :

$$\alpha_p = \alpha_1 \left[ \frac{(1+r)^m - 1}{(1+r)^{m+1-p} - 1} \right] \tag{21}$$

- pour un schéma à défaut permanent et constant (type B) :

$$\alpha_B = \alpha_1 \Big/ \left\{ \frac{1+r}{r} - \frac{m}{(1+r)^m - 1} \right\} \tag{22}$$

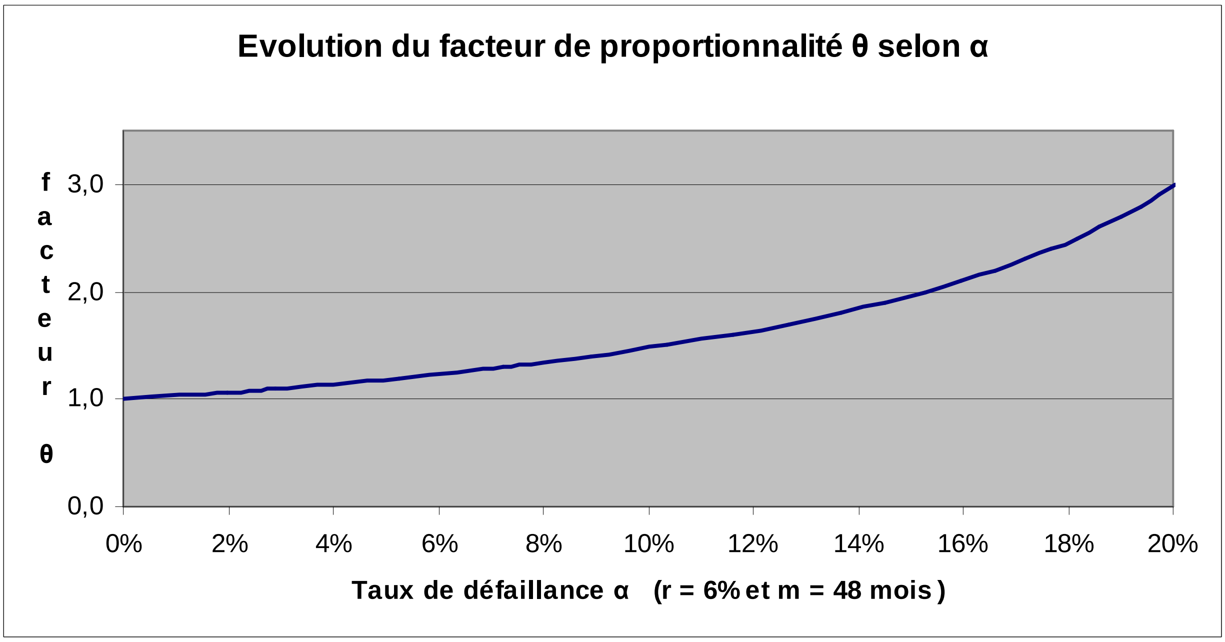
- pour un schéma de défaillance permanente et croissante (type C) :

$$\alpha_C = \alpha_1 \Big/ \left\{ \left( \frac{1+r}{r} \right)^2 - \frac{m}{r} \left[ \frac{1+1,5r+0,5rm}{(1+r)^m - 1} \right] \right\} \tag{23}$$

Il est intéressant de noter que les relations d'équivalence dépendent seulement de r, m, p et $\alpha_1$, indépendamment de la valeur du facteur de proportionnalité θ. Le problème devient trivial et, dans un marché concurrentiel, la connaissance du taux de défaillance en équivalent immédiat et unique devrait conduire au choix du paramètre de proportionnalité θ tel que le profit résiduel soit nul. Rappelons le cas cité : 2% de défaillance d'où un θ à l'équilibre égal à 1,067 au lieu de θ = 1,33 comme fréquemment observé sur le marché des prêts.

Une autre approche consiste à fixer le taux de prêt (θr) par la société de crédit au maximum autorisé, soit le taux d'usure, et de rechercher pour une échéance donnée le facteur de proportionnalité θ qui satisfait l'équation 4 avec différentes hypothèses de taux de défaillance. Pour illustrer cette situation, posons un taux offert de 18% (TEG proportionnel) et un horizon de 48 mois. Le taux de défaillance évolue de 0 à 20% impliquant une variation du facteur de proportionnalité θ de 1 à 3.

Graphique 3 : Evolution du facteur de proportionnalité et défaillance immédiate et unique



| α = | θ = | r/an = | r/mois = |
|---|---|---|---|
| 0,00% | 1,0 | 18,00% | 1,50% |
| 2,00% | 1,067 | 16,87% | 1,41% |
| 7,77% | 1,33 | 13,53% | 1,13% |
| 10,35% | 1,5 | 12,00% | 1,00% |
| 15,28% | 2,0 | 9,00% | 0,75% |
| 18,16% | 2,5 | 7,20% | 0,60% |
| 20,05% | 3,0 | 6,00% | 0,50% |

Avec un taux de défaillance annoncé de 2%, on note que le θ serait égal à 1,067 ou, en d'autres termes, que les établissements prêteraient en anticipant un risque de défaillance quasi nul. Or, dans la situation actuelle du marché correspondant à un TEG offert de 18% pour un coût de financement supposé de l'ordre de 6% soit un θ aux environs de 3, le taux de défaillance serait d'environ 20%, bien au-delà des 2% annoncés ! Si par ailleurs, on retient comme taux de revient, r, le taux moyen pratiqué par les banques traditionnelles, le facteur de proportionnalité est alors de 1,33 soit un taux de défaillance anticipé de 7,77%.

Pour illustrer ce *free cash flow*, le tableau suivant montre pour les quatre schémas de défaillance équivalents, l’importance de la provision non utilisée avec des taux de défaut anticipés entre 2 et 3%.

| | Défaillance unique | | Défaillance permanente | |
|---|---|---|---|---|
| | immédiate | différée | constante | croissante |
| α = | 2,00% | 3,48% | 0,0849% | 0,0052% |
| x(α) = | 2,00% | 1,950% | 1,960% | 1,939% |
| g(α) = | 3,842% | 3,842% | 3,842% | 3,842% |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| α = | 3,00% | 5,21% | 0,1274% | 0,0078% |
| x(α) = | 3,00% | 2,925% | 2,940% | 2,909% |
| g(α) = | 2,782% | 2,782% | 2,782% | 2,782% |

r=6% par an, θ = 1,5, m=48 mois, p = 20 et g(0) = 5,961%

La lecture des rapports financiers des leaders du secteur des prêts à la consommation semble confirmer cet état de fait :

- Cofidis en 2004 annonçait un taux de risque consolidé de 2,34% pour la France, une rentabilité des fonds propres de 36,27% et un ratio d’endettement sur fonds propres de 6,58 !
- Cetelem publiait une charge de risque de 1,6%, un levier d’endettement de 10,4 et une rentabilité des fonds propres de 32%.

# Conclusion

Au terme de cet article, nous avons mis en évidence le fait que le taux de défaillance affiché par les établissements de crédit était manifestement irréaliste. Selon nous, la pratique de ces taux proches de l'usure ne résulte donc pas d'une volonté de couvrir ex ante un risque élevé de défaillance des emprunteurs mais plutôt d'une stratégie de "pompe à liquidités" pour les groupes auxquels ces établissements appartiennent. Il en est ainsi de Cételem qui appartient au groupe BNP Paribas, de Sofinco qui est une filiale du Crédit Agricole ou encore de Cofidis qui, s'il n'appartient pas à un groupe bancaire traditionnel, est une filiale des 3 Suisses qui finance généreusement une équipe sportive du Tour de France.

Une mesure actuarielle et objective de la rente captée par les établissements de crédit est proposée au travers du taux de profit résiduel et les relations d'équivalence entre les schémas de défaillance ont été établies afin de ramener le problème d'estimation à un cas simple autorisant la comparaison.

Les limites de ce travail sont nombreuses mais représentent autant de prolongements possibles à ce papier.

Parmi les limites, nous avons considéré que tous les prêts sont de petite taille (moins de 1024€) et donc accordés au taux le plus élevé. La prise en compte de ce paramètres induit de fait une segmentation parmi les emprunteurs que l'on pourrait assimiler à une discrimination selon leur qualité ('bonne' avec un droit au prêt élevé et un taux plus faible ou 'moyenne' avec une ligne de crédit vite plafonnée et à un taux proche de l'usure). L'existence d'un surprofit permanent illustre aussi les faiblesses d'un marché où soit les emprunteurs sont peu rationnels et acceptent des conditions financières rudes, soit un marché de la dette très déséquilibré où les particuliers sont de plus en plus exclus du circuit traditionnel (le découvert bancaire, par exemple) pour être 'récupérés' par d'autres voies telles les cartes de crédit proposées par la grande distribution et les grands magasins, lesquelles relèvent aussi des mêmes acteurs.

Parmi les prolongements envisageables, la mesure du "*free cash flow*" au sens de Jensen (1986) des sociétés de crédits permettrait d'étayer l'hypothèse d'une collusion entre ces établissements spécialisés en vue de faire remonter des liquidités importantes au niveau des groupes. Si tel était le cas, cela justifierait de proposer l'élaboration d'un *scoring* des emprunteurs permettant de diminuer ce *free cash flow* à l'origine de moindre création richesse pour les actionnaires. Par ailleurs, il conviendrait de prendre en considération l'apport d'un fichier des emprunteurs dit ‘positif’ comme cela se pratique dans plusieurs pays de l’Union Européenne et aux Etats-Unis.

## Bibliographie


Ausubel L. (1991), " The failure of competition in the credit card markets ", *American Economic Review*, Vol. 81-1, 50-81.

Berlin M., Mester L. (2004), "Credit card rates and consumer research", *Review of financial economics*, Vol. 13, 179-198.

Brito D., Hartley P. (1995), " Consumer rationality and credit cards ", *Journal of Political Economy*, Vol. 103-21, 400-433.

Calem P., Mester L. (1995), " Consumer behavior and stickiness of credit card interest cards ", *American Economic Review*, Vol. 85-5, 1327-1336.

Dey S., Mumy G. (2005), "Determinants of borrowing limits on credit cards", *Working paper* N° 7, Bank of Canada.

Jensen M. (1986), "Agency costs of free cash flow, corporate finance and takeovers", American Economic Review, Vol. 76, 323-330.

Kerr S., Dunn L. (2002), "Consumer search behavior in the changing credit card market", *Working Paper N°02-03* , The Ohio State University.

Mester L. (1994), "Why are credit card rates sticky", *Economic Theory*, Vol. 4, 505-530.

Mester L., Nakamura L., Renault M. (2002), " Checking accounts and bank monitoring ", *Working Paper N°01-3* , Federal Reserve Bank of Philadelphia.

Peterson M., Rajan R.G. (1994), " The benefits of lending relationships : evidence from small business data ", *Journal of Finance*, Vol. 49-1, 3-37.

Sharpe S.A. (1990), " Asymmetric information, bank lending and implicit contracts : a stylized model of customer relationships ", *Journal of Finance*, Vol. 45-4, 1069-1087.

Stiglitz J., Weiss A. (1986), "Credit rationing and collateral", in Edwards et al., editors, *Recent Developments in Corporate Finance*.

Stiglitz J., Weiss A. (1981), "Credit rationing in markets with imperfect information", *American Economic Review*, Vol. 73-1, 393-410.

Von Thadden E.L. (2004), " Asymmetric information, bank lending and implicit contracts : the winners curse ", *Finance Research Letters*, Vol. 1, 11-23.

## Annexe mathématique

**Equations 1 et 2 : utilisation de la somme d'une suite en progression géométrique**

Outil : $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(1+r)^j}=\left[\frac{1-(1+r)^{-m}}{r}\right]$

**Equation 3 : Taux de gain attendu**

$$g=\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{P-M}{(1+r)^j}\right)=(\frac{P-M}{K})\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(1+r)^j}=\left(\frac{\theta r}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right)\cdot\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{r}\right)\text{ -1}$$

$$\text{g=}\theta\cdot\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right)-1\Leftrightarrow g=\frac{(\theta-1)-\theta(1+r)^{-m}+(1+\theta r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}$$

**Equation 7 : Taux optimal de défaillance immédiate et unique**

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{P(1-\alpha^*)-M}{(1+r)^j}=0\Rightarrow\frac{K\theta r}{1-(1+\theta r)^{-m}}\cdot(1-\alpha^*)\cdot\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{r}\right)-K=0$$

$$\theta(1-\alpha^*)\left[\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right]-1=0\Rightarrow1-\alpha^*=\frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{1-(1+\theta r)^{-m}}{1-(1+r)^{-m}}\right]$$

**Equation 8 : taux de profit en présence de défaut immédiat et unique**

$$g(\alpha)=[g(0)]-\left[\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{m}\frac{P\alpha}{(1+r)^j}\right]=[g(0)]-\left[\alpha\frac{\theta r}{1-(1+\theta r)^{-m}}\frac{1-(1+r)^{-m}}{r}\right]$$

$$g(\alpha)=\left[\theta\cdot\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right)-1\right]-\left[\alpha\theta\cdot\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right)\right]=(1-\alpha)\theta\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right)-1$$

**Equation 10 : Taux optimal de défaillance différée et unique**

$$K=\sum_{j=1}^{p-1}\frac{P}{(1+r)^j}+\sum_{j=p}^{m}\frac{P(1-\alpha_p^*)}{(1+r)^j}$$

$$\frac{K}{P}=\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{(1+r)^j}+\sum_{j=p}^{m}\frac{1}{(1+r)^j}-\alpha_p^*\sum_{j=p}^{m}\frac{1}{(1+r)^j}\Leftrightarrow\frac{1-(1+\theta r)^{-m}}{\theta r}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(1+r)^j}-\frac{\alpha_p^*}{(1+r)^{p-1}}\sum_{j=1}^{m-p+1}\frac{1}{(1+r)^j}$$

$$\frac{\alpha_p^*}{(1+r)^{p-1}}\left[\frac{1-(1+r)^{-m+p-1}}{r}\right]=\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{r}\right)-\left(\frac{1-(1+\theta r)^{-m}}{\theta r}\right)\Leftrightarrow\alpha_p^*=\left[\frac{\theta\left(1-(1+r)^{-m}\right)-\left(1-(1+\theta r)^{-m}\right)}{\theta(1+r)^{1-p}\left(1-(1+r)^{-m+p-1}\right)}\right]$$

$$\alpha_p^*=\frac{(\theta-1)-\theta(1+r)^{-m}+(1+\theta r)^{-m}}{\theta\left[(1+r)^{1-p}-(1+r)^{-m}\right]}\qquad\text{avec }1\le p\le m$$

**Equation 11 : Mesure actuarielle de la défaillance différée et unique**

$$x(\alpha)=\frac{1}{K}\sum_{j=p}^{m}\frac{P\alpha_p}{(1+\theta r)^j}=\alpha_p\frac{\theta r}{1-(1+\theta r)^{-m}}\frac{[1-(1+\theta r)^{-m+p-1}]}{\theta r(1+\theta r)^{p-1}}=\alpha_p\left[\frac{1-(1+\theta r)^{-m+p-1}}{(1+\theta r)^{p-1}-(1+\theta r)^{-m+p-1}}\right]$$

$$x(\alpha)=\alpha_p\left[\frac{(1+\theta r)^{m-p+1}-1}{(1+\theta r)^m-1}\right]$$

**Equation 12 : Taux de profit résiduel avec défaillance différée et unique**

$$g(\alpha_p) = [g(0)] - \left[ \frac{1}{K} \sum_{j=p}^{m} \frac{P\alpha}{(1+r)^j} \right] = [g(0)] - \left[ \alpha_p \frac{\theta r}{1-(1+\theta r)^{-m}} \frac{1-(1+r)^{-m+p-1}}{r(1+r)^{p-1}} \right]$$

$$g(\alpha_p) = \left[ \theta \cdot \left( \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) - 1 \right] - \left[ \alpha_p \theta \cdot \left( \frac{(1+r)^{1-p} - (1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) \right]$$

$$g(\alpha_p) = \theta(1-\alpha_p) \left( \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) - 1 - \alpha_p \theta \left( \frac{(1+r)^{1-p} - 1}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right)$$

**Equation 14 : Taux optimal de défaillance immédiate et constante**

$$\text{outil : } \sum_{j=1}^{m} \frac{j}{(1+r)^j} = \frac{(1+r) - (1+r+rm)(1+r)^{-m}}{r^2}$$

$$K = \sum_{j=1}^{m} \frac{P(1-j\alpha^*)}{(1+r)^j} = P \sum_{j=1}^{m} \frac{(1-j\alpha^*)}{(1+r)^j} = P \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(1+r)^j} - \alpha^* \sum_{j=1}^{m} \frac{j}{(1+r)^j} \right\}$$

$$\frac{K}{P} = \left\{ \left( \frac{1-(1+r)^{-m}}{r} \right) - \alpha^* \left( \frac{(1+r) - (1+r+rm)(1+r)^{-m}}{r^2} \right) \right\}$$

$$\alpha^* = \frac{\left( \frac{1-(1+r)^{-m}}{r} \right) - \left( K \cdot \frac{[1-(1+\theta r)^{-m}]}{K\theta r} \right)}{\left( \frac{(1+r) - (1+r+rm)(1+r)^{-m}}{r^2} \right)} = \frac{\frac{r[\theta - \theta(1+r)^{-m} - 1 + (1+\theta r)^{-m}]}{\theta r^2}}{\frac{(1+r) - (1+r+rm)(1+r)^{-m}}{r^2}}$$

$$\alpha^* = \frac{r}{\theta} \cdot \left[ \frac{(\theta - 1) - \theta(1+r)^{-m} + (1+\theta r)^{-m}}{(1+r) - (1+r+rm)(1+r)^{-m}} \right]$$

**Equation 15 : Mesure actuarielle de défaillance immédiate et constante**

$$x(\alpha) = \frac{1}{K} \sum_{j=p}^{m} \frac{Pj\alpha}{(1+\theta r)^j} = \alpha \left( \frac{\theta r}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) \left( \frac{(1+\theta r) - (1+\theta r + \theta r m)(1+\theta r)^{-m}}{\theta^2 r^2} \right)$$

$$x(\alpha) = \alpha \left( \frac{1}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) \left( \frac{(1+\theta r)(1-(1+\theta r)^{-m}) - \theta r m (1+\theta r)^{-m}}{\theta r} \right) = \alpha \left[ \left( \frac{1+\theta r}{\theta r} \right) - \left( \frac{m(1+\theta r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) \right]$$

$$x(\alpha) = \alpha \left[ \left( \frac{1+\theta r}{\theta r} \right) - m \left( \frac{1}{(1+\theta r)^m - 1} \right) \right]$$

**Equation 16 : Taux de profit résiduel avec défaillance immédiate et constante**

$$g(\alpha) = g - \left[ \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{m} \frac{Pj\alpha}{(1+r)^j} \right] = g - \alpha \left( \frac{\theta r}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) \left( \frac{(1+r) - (1+r+rm)(1+r)^{-m}}{r^2} \right)$$

$$g(\alpha) = \theta \cdot \left( \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) - 1 - \alpha \frac{\theta}{r} \left[ \frac{(1+r) - (1+r+rm)(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right]$$

$$g(\alpha) = \theta \left[ 1 - \alpha \left( \frac{1+r}{r} \right) \right] \left( \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) - 1 + \alpha \theta m \left[ \frac{(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right]$$

**Equation 18 : Taux optimal de défaillance immédiate et progressive**

outil $\sum_{j=1}^{m} \frac{j^2}{(1+r)^j} = \frac{(1+r)(2+r) - \left[(1+r)(2+r+2mr) + r^2m^2\right](1+r)^{-m}}{r^3}$

$$K = \sum_{j=1}^{m} \frac{P\left[1-\alpha^*(j(j+1)/2)\right]}{(1+r)^j} \Rightarrow \frac{K}{P} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(1+r)^j} - \frac{\alpha^*}{2}\sum_{j=1}^{m} \frac{j^2}{(1+r)^j} - \frac{\alpha^*}{2}\sum_{j=1}^{m} \frac{j}{(1+r)^j}$$

$$\frac{1-(1+\theta r)^{-m}}{\theta r} = \left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{r}\right) - \frac{\alpha^*}{2}\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{j}{(1+r)^j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{j^2}{(1+r)^j}\right]$$

$$\alpha^* = \frac{\left(\frac{1-(1+r)^{-m}}{r}\right) - \left(\frac{1-(1+\theta r)^{-m}}{\theta r}\right)}{\frac{1}{2}\left[\frac{(1+r)-(1+r+rm)(1+r)^{-m}}{r^2} + \frac{(1+r)(2+r)-\left[(1+r)(2+r+2mr)+r^2m^2\right](1+r)^{-m}}{r^3}\right]}$$

$$\alpha^* = \frac{r^2}{\theta} \cdot \left\{ \frac{\left[(\theta-1) - \theta(1+r)^{-m} + (1+\theta r)^{-m}\right]}{(1+r)^2 - \left[(1+r)(1+r+rm) + 0{,}5r^2m(1+m)\right](1+r)^{-m}} \right\}$$

**Equation 19 : Mesure actuarielle de défaillance immédiate et progressive**

$$x(\alpha) = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{m} \frac{P\left[\alpha(j(j+1)/2)\right]}{(1+\theta r)^j}$$

$$x(\alpha) = \frac{\alpha\theta r}{2}\left[\frac{(1+\theta r)-(1+\theta r+\theta rm)(1+\theta r)^{-m}}{\theta^2 r^2(1-(1+\theta r)^{-m})} + \frac{(1+\theta r)(2+\theta r)-\left[(1+\theta r)(2+\theta r+2m\theta r)+\theta^2r^2m^2\right](1+\theta r)^{-m}}{\theta^3 r^3(1-(1+\theta r)^{-m})}\right]$$

$$x(\alpha) = \frac{\alpha}{2}\cdot\left[\frac{\theta r(1+\theta r)+(1+\theta r)(2+\theta r)-\left[\theta r(1+\theta r+\theta rm)+(1+\theta r)(2+\theta r+m\theta r)+\theta^2r^2m^2\right](1+\theta r)^{-m}}{\theta^2 r^2(1-(1+\theta r)^{-m})}\right]$$

$$x(\alpha) = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{2(1+\theta r)^2 - \left(2(1+\theta r)^2 + \theta rm(2+3\theta r+\theta rm)\right)(1+\theta r)^{-m}}{\theta^2 r^2(1-(1+\theta r)^{-m})}\right]$$

$$x(\alpha) = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{2(1+\theta r)^2(1-(1+\theta r)^{-m})}{\theta^2 r^2(1-(1+\theta r)^{-m})} - \frac{\theta rm}{\theta^2 r^2}\frac{(2+3\theta r+\theta rm)(1+\theta r)^{-m}}{(1-(1+\theta r)^{-m})}\right]$$

$$x(\alpha) = \alpha\left[\left(\frac{1+\theta r}{\theta r}\right)^2 - \left(\frac{m}{\theta r}\right)\left(\frac{1+1{,}5\theta r+0{,}5\theta rm}{(1+\theta r)^m - 1}\right)\right]$$

**Equation 20 : Taux de profit résiduel avec défaillance immédiate et progressive**

$$g(\alpha) = g - \left[ \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{m} \frac{P\alpha(j(j+1)/2)}{(1+r)^j} \right]$$

$$g(\alpha) = g - \alpha \frac{1}{2} \left( \frac{\theta r}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) \left( \frac{(1+r)-(1+r+rm)(1+r)^{-m}}{r^2} + \frac{(1+r)(2+r)-\left[(1+r)(2+r+2rm)+r^2m^2\right](1+r)^{-m}}{r^3} \right)$$

$$g(\alpha) = \theta \left( \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) - 1 - \frac{\alpha\theta}{2r^2} \left[ \frac{r(1+r)+(1+r)(2+r)-\left[r(1+r+rm)+(1+r)(2+r+2rm)+r^2m^2)\right](1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right]$$

$$g(\alpha) = \theta \left( \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) - 1 - \alpha\theta \left( \frac{1+r}{r} \right)^2 \left( \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) - \alpha \frac{\theta}{2r^2} \left( \frac{\left[rm(2+3r+rm)\right](1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right)$$

$$g(\alpha) = \theta \left[ 1 - \alpha \left( \frac{1+r}{r} \right)^2 \right] \left( \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right) - 1 + \alpha \frac{\theta}{r^2} \left[ \frac{\left[0,5rm(2+3r+rm)\right](1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right]$$

**Equation 21 : Comparaison défaillance unique immédiate versus unique différée en p**

$$g - \alpha_1 \theta \left[ \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right] \Leftrightarrow g - \alpha_p \frac{\theta}{(1+r)^{p-1}} \left[ \frac{1-(1+r)^{-m+p-1}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right]$$

$$\alpha_p = \alpha_1 \frac{\theta \left[ \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right]}{\frac{\theta}{(1+r)^{p-1}} \left[ \frac{1-(1+r)^{-m+p-1}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right]} = \alpha_1 \left[ \frac{1-(1+r)^{-m}}{(1+r)^{1-p}\left[1-(1+r)^{-m+p-1}\right]} \right] = \alpha_1 \left[ \frac{1-(1+r)^{-m}}{(1+r)^{1-p}-(1+r)^{-m}} \right]$$

$$\alpha_p = \alpha_1 \left[ \frac{(1+r)^m - 1}{(1+r)^{m+1-p} - 1} \right]$$

---

**Equation 22 : Comparaison défaillance unique immédiate versus permanente constante**

$$g - \alpha_1 \theta \left[ \frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right] \Leftrightarrow g - \alpha_B \left( \frac{\theta}{r} \right) \left( \frac{(1+r)-(1+r+rm)(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}} \right)$$

$$\alpha_1 \left[ 1-(1+r)^{-m} \right] = \alpha_B \left[ \frac{1}{r} \left[ (1+r)-(1+r+rm)(1+r)^{-m} \right] \right]$$

$$\alpha_1 = \alpha_B \left[ \frac{(1+r)\left[1-(1+r)^{-m}\right]}{r\left[1-(1+r)^{-m}\right]} - \frac{m(1+r)^{-m}}{\left[1-(1+r)^{-m}\right]} \right] = \alpha_B \left[ \frac{1+r}{r} - \frac{m}{(1+r)^m - 1} \right]$$

$$\alpha_B = \alpha_1 \Big/ \left\{ \frac{1+r}{r} - \frac{m}{(1+r)^m - 1} \right\}$$

---

**Equation 23 : Comparaison défaillance unique immédiate versus permanente croissante**

$$g-\alpha_1\theta\left[\frac{1-(1+r)^{-m}}{1-(1+\theta r)^{-m}}\right]\Leftrightarrow g-\alpha_C\,\frac{\theta}{2}\left(\frac{r(1+r)-r(1+r+rm)(1+r)^{-m}+(1+r)(2+r)-\left[(1+r)(2+r+2rm)+r^2m^2\right](1+r)^{-m}}{r^2\left[1-(1+\theta r)^{-m}\right]}\right)$$

$$\alpha_1\left[1-(1+r)^{-m}\right]=\alpha_C\left\{\frac{1}{2r^2}\left[2(1+r)^2-\left[2(1+r)^2+rm(2+3r+rm)(1+r)^{-m}\right]\right]\right\}$$

$$\alpha_1=\alpha_C\left[\left(\frac{1+r}{r}\right)^2-m\frac{1+1,5r+0,5rm}{r\left[(1+r)^m-1\right]}\right]$$

$$\alpha_C=\alpha_1\Big/\left\{\left(\frac{1+r}{r}\right)^2-\frac{m}{r}\left[\frac{1+1,5r+0,5rm}{(1+r)^m-1}\right]\right\}$$